

## Проверка на хипотеза. Непараметрични тестове

## Параметрични и непараметрични тестове

Дизайн	Непараметрични		Параметрични
Скала	Номинална	Ординална	Ординална, интервална, пропорционална
1 извадка	$\chi^2$ тест за съответствие	Wilcoxon тест	t-test за 1 извадка
2 независими извадки	$\chi^2$ тест	Mann–Whitney U-тест	t-test за 2 извадки
2 свързани извадки	McNemar тест	Wilcoxon тест	t-test за 2 сдвоени извадки
К независими извадки	$\chi^2$ тест	Kruskal–Wallis H-тест	ANOVA
К свързани извадки		Friedman тест за сдвоени извадки	ANOVA с повторни измервания

## Избор на статистически тест

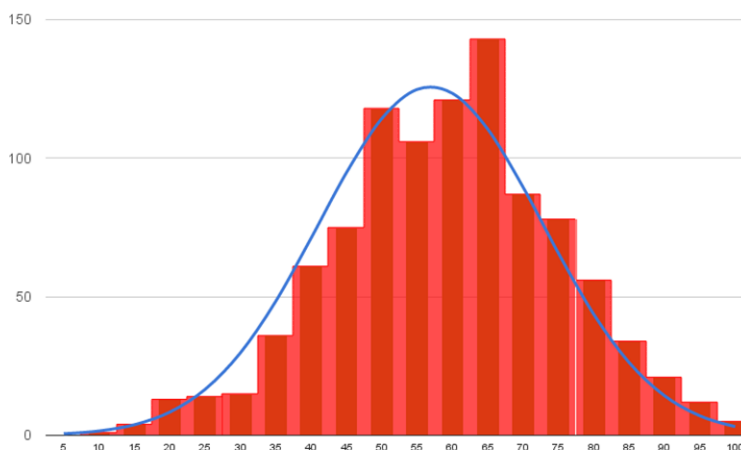
Дизайн? Скала?	Непараметрични		Параметрични
	Номинална	Ординална	Ординална, интервална, пропорционална
1 извадка	$\chi^2$ тест за съответствие	Wilcoxon тест	t-test за 1 извадка
2 независими извадки	$\chi^2$ тест	Mann-Whitney U-тест	t-test за 2 извадки
2 свързани извадки	McNemar тест	Wilcoxon тест	t-test за 2 сдвоени извадки
K независими извадки	$\chi^2$ тест	Kruskal-Wallis H-тест	ANOVA
K свързани извадки		Friedman тест за сдвоени извадки	ANOVA с повторни измервания

## Проверка за нормалност

- **Графичен метод:** графично сравняване на плътността на нормалното разпределение с хистограмата на относителните некумуляирани честоти, получена на базата на направената извадка.
- Предимства – нагледност, недостатъци – ниска надеждност.

## Проверка за нормалност

- Графичен метод



## Проверка за нормалност

- Чрез коефициента на вариация  $V$

$$V = \frac{S_x}{\bar{X}} \times 100$$

- Използвайки, че  $V$  за нормалното разпределение е между 8% и 40%, се проверява дали емпиричният коефициент на вариация принадлежи на този интервал.
- Предимства – простота, недостатъци – различните стойности на коефициента на вариация не съответстват еднозначно само на едно теоретично разпределение.

## Проверка за нормалност

- **Чрез тест (критерий) за нормалност:**
  - $K^2$  тест на D'Agostino
  - Тест на Jarque–Bera
  - Тест на Anderson–Darling
  - Тест на Cramér–von Mises
  - Тест на Lilliefors
  - Тест на Kolmogorov–Smirnov
  - Тест на Shapiro–Wilk
- Най-прецизна оценка от научна гледна точка

## Тест на Колмогоров-Смирнов

- Тестът на Колмогоров-Смирнов е един от най-мощните непараметрични критерии, особено при голям брой единици на наблюдение.
- Методът се базира на **сравняването на кумулативни редове** и има три разновидности:
  - Съпоставка и търсене на съответствие между извадка и генерална съвкупност
  - Между две извадки с еднакъв брой единици на наблюдение
  - Между две извадки с различен брой единици на наблюдение

## Тест на Колмогоров-Смирнов

Възрастова структура в г.	България %	f (фактически честоти)			
15 – 19	13.2	25			
20 – 24	14.3	32			
25 – 29	15.7	38			
30 – 34	15.3	52			
35 – 39	15.1	45			
40 – 44	12.8	88			
45 – 49	13.6	60			
		$\Sigma = 340$			

## Тест на Колмогоров-Смирнов

Възрастова структура в г.	България %	f (фактически честоти)	f' (теоретични честоти)	Кумулативни сборове		f <sub>k</sub> - f' <sub>k</sub>
				f <sub>k</sub>	f' <sub>k</sub>	
15 – 19	13.2	25	44.9	25	44.9	19.9
20 – 24	14.3	32	48.6	57	93.5	36.5
25 – 29	15.7	38	53.4	95	146.9	51.9
30 – 34	15.3	52	52.0	147	198.9	51.9
35 – 39	15.1	45	51.3	192	250.2	58.2
40 – 44	12.8	88	43.5	280	293.8	13.8
45 – 49	13.6	60	46.2	340	340.0	0
		$\Sigma = 340$	$\Sigma = 340$			

$$\lambda = \frac{D}{\sqrt{n}}$$

## Непараметрични тестове

- От статистическите хипотези, проверката на които изисква използването на непараметрични тестове, изследователят най-често се среща с **хипотеза, отнасяща се към самото статистическо разпределение**.
  - Нулевата хипотеза в този случай гласи, че **различиято между фактическите и теоретическите очаквани разпределения е обусловено само от причини от категорията на случайността**.
- Непараметричните критерии имат няколко **основни преимущества** в сравнение с параметричните:
  - независимост от формата на разпределение;
  - неограниченост от начина на отчитане;
  - по-малка трудоемкост (това предимство отпада при използване на статистически софтуер за анализ на данни).

## Тест на Пирсън ( $\chi^2$ -тест)

- Критерият на съгласие на Пирсън е **основен метод за оценка на хипотези, отнасящи се към самото статистическо разпределение**.
  - Такива хипотези, ако те се интерпретират в духа на нулевата хипотеза, се заключават в предположението, че **разликата между фактическите и очакваните разпределения е обусловена само от случайности**.
- Критерият на Пирсън се използва за статистическа оценка на резултатите от изследванията в случаи, в които не е необходимо да се знае абсолютната величина на самия признак и размерът на връзката, а се изисква **да се потвърди съществено ли е влиянието на изучавания фактор или е случайно**.

## Тест на Пирсън ( $\chi^2$ -тест)

- **Алгоритъм:**
  - Дефиниране на нулева, алтернативна и работна хипотези
  - Определяне на ниво на значимост
  - Изчисляване на степени свобода и определяне на теоретична (критична, таблична) стойност
  - Изчисляване на емпирична стойност
  - Сравнение на теоретичната и емпирична стойности
  - Извод и интерпретация

## Тест на Пирсън ( $\chi^2$ -тест)

Пол	Ваксина против сезонен грип					Общо
	Не	По-скоро не	Не знам	По-скоро да	Да	
Мъже	130	180	100	50	40	500
Жени	90	70	150	120	70	500
Общо	220	250	250	170	110	1000

Наблюдавани честоти (ФАКТИ)

Полът на анкетираните **оказва ли влияние** върху нагласите за поставяне на ваксина против сезонен грип?

Дали полът **е фактор** за нагласите за поставяне на ваксина против сезонен грип?

## Тест на Пирсън ( $\chi^2$ -тест)

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_0 - f_T)^2}{f_T}$$

Таблица 3.  $\chi^2$ -разпределение

df	0.10	0.05	0.01
1	2.706	3.841	6.635
2	4.605	5.991	9.210
3	6.251	7.815	11.345
4	7.779	9.488	13.277
5	9.236	11.070	15.086
6	10.645	12.592	16.812
7	12.017	14.067	18.475
8	13.362	15.507	20.090
9	14.684	16.919	21.666
10	15.987	18.307	23.209

$$df = (R - 1) \times (C - 1)$$

## Тест на Пирсън ( $\chi^2$ -тест)

Пол	Ваксина против сезонен грип				Да	Общо
	Не	По-скоро не	Не знам	По-скоро да		
Мъже	130	180	100	50	40	500
Жени	90	70	150	120	70	500
Общо	220	250	250	170	110	1000

Наблюдавани честоти (ФАКТИ)

Пол	Ваксина против сезонен грип				Да	Общо
	Не	По-скоро не	Не знам	По-скоро да		
Мъже	110	125	125	85	55	500
Жени	110	125	125	85	55	500
Общо	220	250	250	170	110	1000

Очаквани честоти (ОЧАКВАНИЯ)

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_0 - f_T)^2}{f_T} = 11$$



## Тест на Пирсън ( $\chi^2$ -тест)

- **Условия за прилагане:**
  - Голяма по обем представителна извадка (над 50 единици на наблюдение)
  - Всички очаквани (теоретични) честоти са поне 1 и поне 80% от тях са по-големи от 5
- **Заклученията зависят понякога от начина на групировка** на случаите според разновидностите на наблюдаваните признаци.
- **Корекция на Йейтс (само при таблици 2 x 2):**

$$\chi^2 = \sum \frac{(|f_0 - f_T| - 0,5)^2}{f_T}$$

## Тест на Пирсън ( $\chi^2$ -тест)

- **Метод при изучаване на качествени алтернативни признаци**

$$\chi^2 = \frac{n \times (a \times d - b \times c)^2}{(a + b) \times (c + d) \times (a + c) \times (b + d)}$$

Вид хранене	Здравно състояние		Всичко
	Заболели (+)	Здрави (-)	
Изкуствено (+)	43 a	50 b	93 a + b
Естествено (-)	5 c	87 d	92 c + d
Всичко	48 a + c	137 b + d	185 n

## Точен тест на Фишер

- Приложим само за таблици 2 x 2
- Изчислява точна р-стойност

Пол	На диета	Без диета	Общо
Мъже	1 a	11 c	12 a + c
Жени	9 b	3 d	12 b + d
Всичко	10 a + b	14 c + d	24 a + b + c + d

$$p = \frac{\binom{a+b}{a} \binom{c+d}{c}}{\binom{n}{a+c}} = \frac{(a+b)! (c+d)! (a+c)! (b+d)!}{a! b! c! d! n!}$$

$$p = \frac{\binom{10}{1} \binom{14}{11}}{\binom{24}{12}} = \frac{10! 14! 12! 12!}{1! 9! 11! 3! 24!} \approx 0.001346076$$

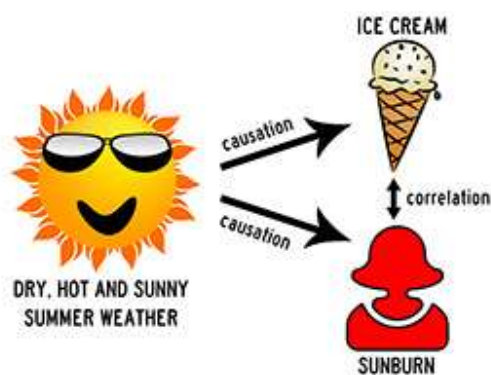
## Връзка между $\chi^2$ -тест и t-тест

	Влошаване	Подобряване	Общо
Експеримент	A	B	A + B
Контрола	C	D	C + D
Общо	A + C	B + D	N

## Връзка между $\chi^2$ -тест и t-тест

	Влошаване	<i>Без промяна</i>	Подобряване	Общо
Експеримент	A	<i>B</i>	C	A + B + C
Контрола	D	<i>E</i>	F	D + E + F
Общо	A + D	<i>B + E</i>	C + F	N

## Зависимост и причинно-следствена връзка



Доказването на статистическа зависимост (статистическа връзка) не означава доказване на причинно-следствена връзка!

Причинно-следствена връзка в медицината се доказва посредством епидемиологични методи (критерии на Брадфорд-Хил).

## Рангови тестове

Дизайн	Непараметрични		Параметрични
	Номинална	Ординална	Ординална, интервална, пропорционална
1 извадка	$\chi^2$ тест за съответствие	Wilcoxon тест	t-test за 1 извадка
2 независими извадки	$\chi^2$ тест	Mann-Whitney U-тест	t-test за 2 извадки
2 свързани извадки	McNemar тест	Wilcoxon тест	t-test за 2 сдвоени извадки
K независими извадки	$\chi^2$ тест	Kruskal-Wallis H-тест	ANOVA
K свързани извадки		Friedman тест за сдвоени извадки	ANOVA с повторни измервания

## U-тест на Mann-Whitney

- 2 независими извадки
- Минимум ординална скала на измерване
- **$H_0$ : Двете сравнявани извадки са еквивалентни по местоположение (имат еднакви медиани или средни рангове).**
  - Данните от двете извадки се комбинират и ранжират по стойност.
  - Определя се среден ранг (медиана) за двете извадки.
  - Ако двете извадки са идентични по местоположение, то ранговете следва да бъдат разпределени равномерно между двете изследвани групи.

## U-тест на Mann–Whitney

- **Цел:** Сравнение на медианите (средните рангове) на две независими извадки.
- **Пример:** Сравнение на подобрението (по скала 1-10) при пациенти, подложени на две различни физиотерапевтични програми.
- **Размер на ефекта:** Разликата между двете медиани (средни рангове).
- **$H_0$ :** Няма разлика между двете извадки по отношение на техните медиани (средни рангове).
- **Р-стойност:** Ако двете извадкови медиани (средни рангове) са идентични, какъв е шансът да наблюдаваме такава разлика (или по-голяма) единствено и само в резултат на случайността?

## H-тест на Kruskal–Wallis

- **K** на брой независими извадки
- **Минимум** ординална скала на измерване
- **$H_0$ :** Сравняваните **K** на бройки извадки са еквивалентни по местоположение (имат еднакви медиани или средни рангове).
  - Данните от извадките се комбинират и ранжират по стойност.
  - Определя се среден ранг (медиана) за всички изследвани извадки.
  - Ако **K** на брой изследваните извадки са идентични по местоположение, то ранговете следва да бъдат разпределени равномерно (на случаен принцип).